

Elektronentransport in elliptischen Galaxien

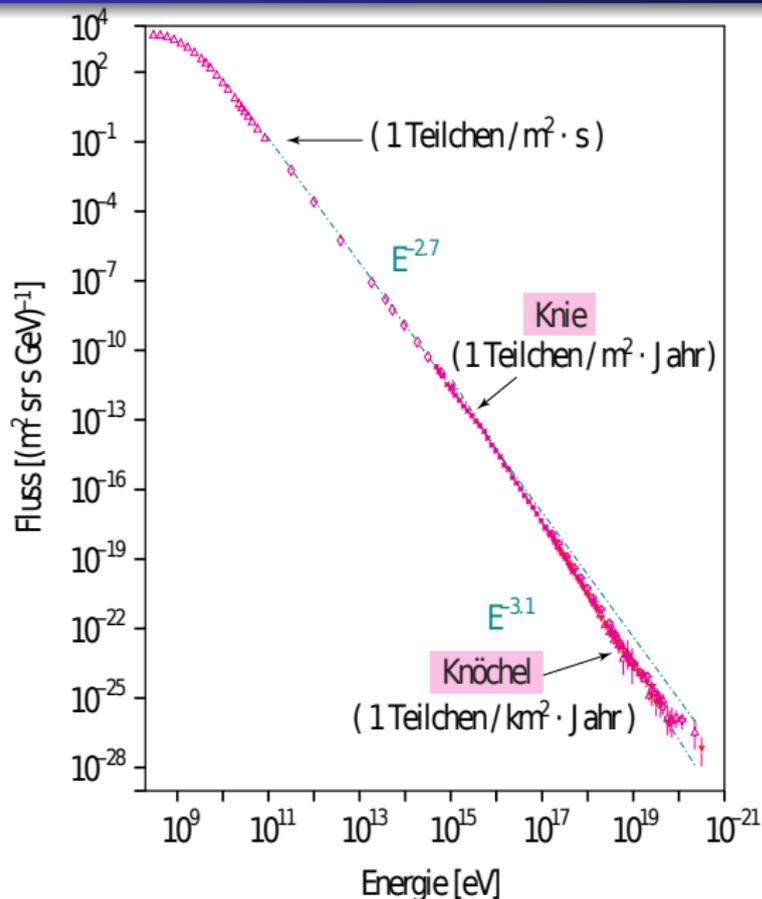
Alex Ivascenko

Lehrstuhl für Astronomie
Universität Würzburg

14. Oktober 2008

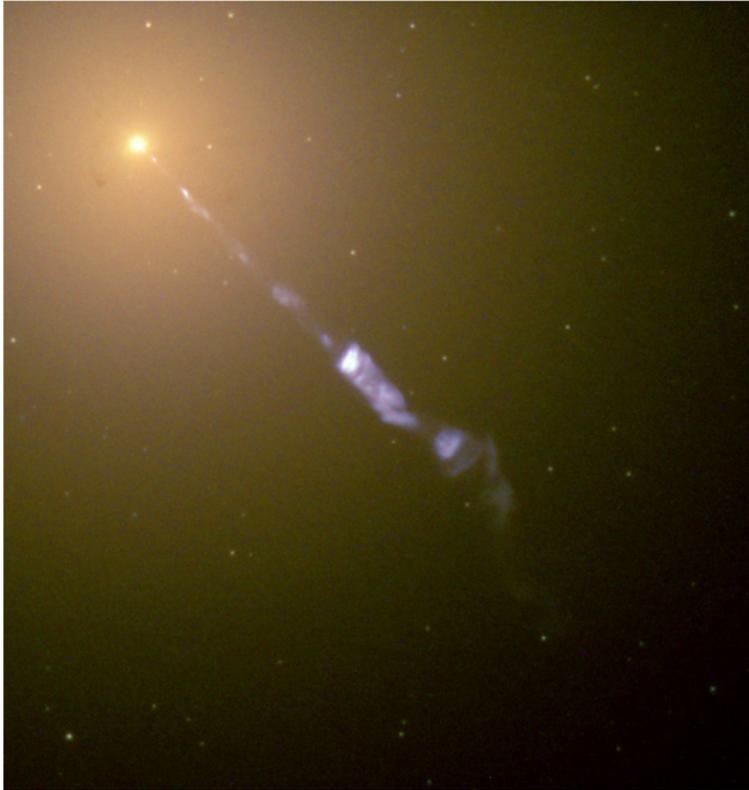


Cosmic Ray Spectrum



- Protonen, schwerere Kerne, Elektronen
- Potenzgesetz $\sim E^{-\gamma}$ über einen sehr weiten Energieintervall
- Knie bei ca. 10^{16} eV, $\gamma = 2.7 \rightarrow \gamma = 3.1$
- Knöchel bei sehr hohen Energien
- niederenergetische Teilchen aus der Sonne
- höherenergetische Komponente extragalaktisch





Messier 87

- elliptische Riesengalaxie (Typ E1)
- dominierendes Objekt im Virgo-Cluster (da sind wir auch!)
- AGN / relativistischer Jet
- Entfernung 20 Mpc, Ausdehnung 40 kpc



Der Ausgangspunkt der Berechnungen ist die Zeitentwicklung der Phasenraumdichte $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ der Teilchenspezies a , beschrieben durch die relativistische Vlasov-Gleichung:

Relativistische Vlasov-Gleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

mit

$$\dot{\mathbf{p}} = q_a \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right]$$

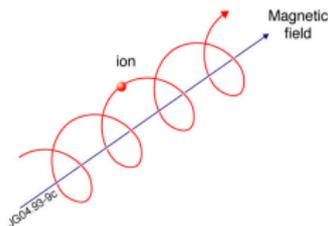
und

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_a}$$



$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$$

- Ortskoordinaten einzelner Teilchen \rightarrow
Koordinaten des Führungszentrums
- sphärische Impulskoordinaten $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow$
 $(p, \mu, \phi) \rightarrow (p)$ (Diffusionsnäherung)
- Ortsdiffusion \perp Magnetfeld = 0
- Erwartungswert $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \langle f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \rangle \Rightarrow$ Wegfallen der fluktuierenden E- und B-Feldkomponenten
- kontinuierliche $(-\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 \dot{p} f))$ und katastrophale $(-\frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)})$ Verluste
- stationäre Lösung $\rightarrow \frac{\partial f_a}{\partial t} = 0$



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_pf(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Ortsoperator \mathcal{L}_x beschreibt Diffusion und Konvektion im Ortsraum

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) \equiv \nabla [\kappa(\mathbf{x}, p) \nabla f - \mathbf{V}f]$$



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Ortsoperator \mathcal{L}_x beschreibt Diffusion und Konvektion im Ortsraum

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) \equiv \nabla [\kappa(\mathbf{x}, p) \nabla f - \mathbf{V}f]$$

Diffusion im Ortsraum durch Wechselwirkung der Teilchen mit den Magnetfeldern



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Ortsoperator \mathcal{L}_x beschreibt Diffusion und Konvektion im Ortsraum

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) \equiv \nabla [\kappa(\mathbf{x}, p) \nabla f - \mathbf{V}f]$$

Diffusion im Ortsraum durch Wechselwirkung der Teilchen mit den Magnetfeldern

Konvektion beschreibt die Bewegung des Hintergrundmediums mit Geschwindigkeit \mathbf{V}



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der **Impulsoperator** \mathcal{L}_p beschreibt Diffusion, Konvektion und Verluste im Impulsraum

$$\mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) \equiv \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A \frac{\partial f}{\partial p} - B p^3 f - p^2 \dot{p} f \right) - \frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)}$$



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Impulsoperator \mathcal{L}_p beschreibt Diffusion, Konvektion und Verluste im Impulsraum

$$\mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) \equiv \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A \frac{\partial f}{\partial p} - B p^3 f - p^2 \dot{p} f \right) - \frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)}$$

Diffusion im Impulsraum beschrieben durch den Fermi II Mechanismus



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Impulsoperator \mathcal{L}_p beschreibt Diffusion, Konvektion und Verluste im Impulsraum

$$\mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) \equiv \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A \frac{\partial f}{\partial p} - B p^3 f - p^2 \dot{p} f \right) - \frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)}$$

Diffusion im Impulsraum beschrieben durch den Fermi II Mechanismus
Energiegewinn durch Beschleunigung an relativistischen Schockfronten
(Fermi I)



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

Der Impulsoperator \mathcal{L}_p beschreibt Diffusion, Konvektion und Verluste im Impulsraum

$$\mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) \equiv \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A \frac{\partial f}{\partial p} - B p^3 f - p^2 \dot{p} f \right) - \frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)}$$

Diffusion im Impulsraum beschrieben durch den Fermi II Mechanismus
Energiegewinn durch Beschleunigung an relativistischen Schockfronten
(Fermi I)

kontinuierliche und katastrophale Energieverluste



generalisierte Transportgleichung (steady-state)

Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung:

$$\mathcal{L}_x f(\mathbf{x}, p) + \mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) = -S(\mathbf{x}, p)$$

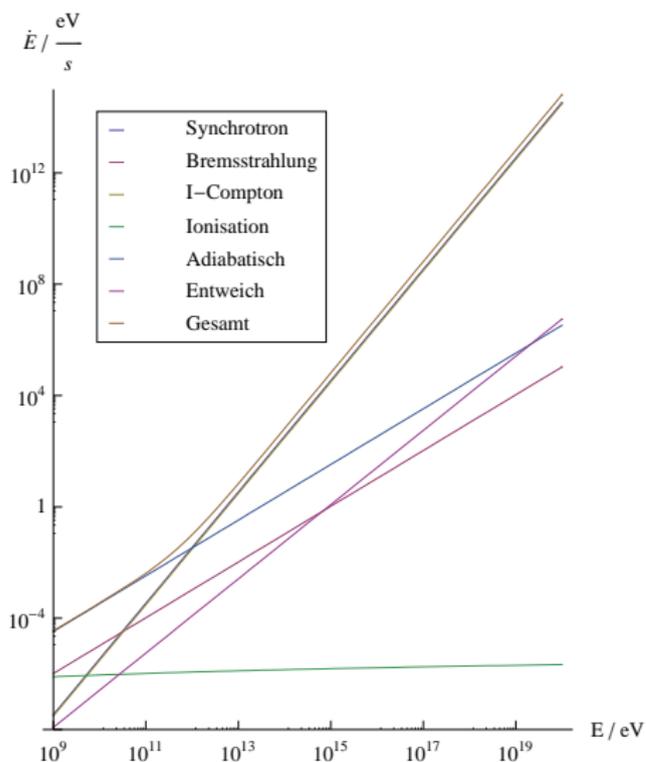
Der Impulsoperator \mathcal{L}_p beschreibt Diffusion, Konvektion und Verluste im Impulsraum

$$\mathcal{L}_p f(\mathbf{x}, p) \equiv \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A \frac{\partial f}{\partial p} - B p^3 f - p^2 \dot{p} f \right) - \frac{f}{T_c(\mathbf{x}, p)}$$

Diffusion im Impulsraum beschrieben durch den Fermi II Mechanismus
Energiegewinn durch Beschleunigung an relativistischen Schockfronten
(Fermi I)

kontinuierliche und **katastrophale** Energieverluste





- Strahlungsverluste
 $\dot{p} \sim -(\omega_B + \omega_{ph}) p^2$
- Bremsstrahlung $\dot{p} \sim -np$
- Adiabatische Verluste
 $\dot{p} = -\frac{1}{3} \nabla \mathbf{V} p$
- Ionisationsverluste
 $\dot{p} \sim -n \log(p)$
- Entweichverluste werden indirekt berücksichtigt



Separation des Orts- und Impulsproblems

Die Transportgleichung lässt sich teilweise analytisch lösen, wenn der Orts- und Impulsoperator separierbar sind:

$$\mathcal{L}_x(\mathbf{x}, p) = g(p)\mathcal{O}_x(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathcal{L}_p(\mathbf{x}, p) = h(\mathbf{x})\mathcal{O}_p(p)$$

Und auch die Quellenfunktion das Produkt eines Orts- und eines Impulsanteils ist:

$$S_a(\mathbf{x}, p) = Q_1(\mathbf{x})Q_2(p)$$

Die Lösung kann dann als Faltung dargestellt werden:

Faltungsintegral

$$M_a(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty du G(p, u)P(\mathbf{x}, u)$$



Die Ortslösung kann man nach den Eigenfunktionen $H_i(\mathbf{x})$ des Ortsoperators $\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \nabla [\kappa(\rho)\nabla]$ entwickeln:

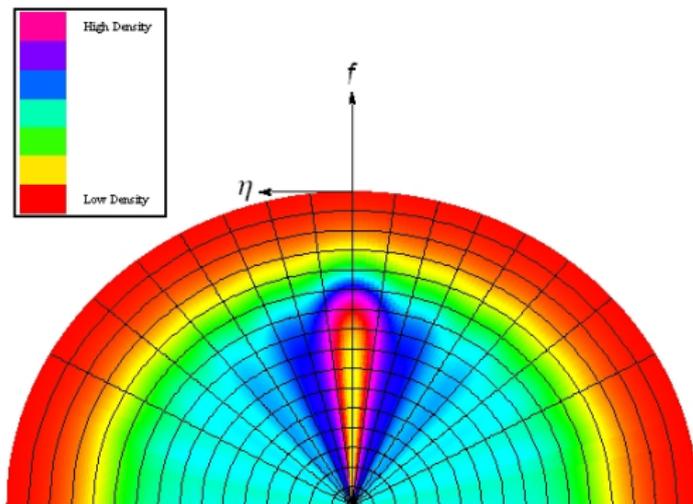
$$P(\mathbf{x}, u) = \sum_i c_i H_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u}$$

Die λ_i sind die Eigenwerte des Ortsoperators und c_i Gewichtungsfaktoren.



Ortsproblem in elliptischer Geometrie

Das Ortsproblem wurde von Wang u. Schlickeiser (1987) für Spiralgalaxien und von Hein u. Spanier (2008) für Elliptische Galaxien bereits gelöst.



Setzt man jetzt die Entwicklung für $P(\mathbf{x}, u) = \sum_i A_i(\mathbf{x})e^{-\lambda_i^2 u}$ in das Faltungsintegral ein und zieht die Summe raus, so erhält man

$$M_a(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty du G(p, u) P(\mathbf{x}, u) = \sum_i A_i(\mathbf{x}) R_i(p)$$

mit

$$R_i(p) \equiv \int_0^\infty du G(p, u) e^{-\lambda_i^2 u}$$



Herleitung der leaky-box equation

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{g(p)} \mathcal{O}_p G$$

- man nehme die DGL für G



Herleitung der leaky-box equation

$$\sum_i A_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u} \frac{\partial G}{\partial u} = \sum_i A_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u} \frac{1}{g(p)} \mathcal{O}_p G$$

- man nehme die DGL für G
- multipliziere sie mit $P(\mathbf{x}, u) = \sum_i A_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u}$



Herleitung der leaky-box equation

$$\int_0^{\infty} du \sum_i A_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u} \frac{\partial G}{\partial u} = \int_0^{\infty} du \sum_i A_i(\mathbf{x}) e^{-\lambda_i^2 u} \frac{1}{g(p)} \mathcal{O}_p G$$

- man nehme die DGL für G
- multipliziere sie mit $M_a(\mathbf{x}, p) = \sum_i A_i(\mathbf{x}) R_i(p)$
- und integriere über u von 0 bis ∞



Herleitung der leaky-box equation

$$\sum_i A_i(\mathbf{x}) \int_0^\infty du e^{-\lambda_i^2 u} \frac{\partial G}{\partial u} = \sum_i A_i(\mathbf{x}) \frac{1}{g(p)} \mathcal{O}_p \int_0^\infty du e^{-\lambda_i^2 u} G$$

- man nehme die DGL für G
- multipliziere sie mit $M_a(\mathbf{x}, p) = \sum_i A_i(\mathbf{x}) R_i(p)$
- und integriere über u von 0 bis ∞
- die linke Seite partiell integrieren und die Definition $R_i(p) \equiv \int_0^\infty du G(p, u) e^{-\lambda_i^2 u}$ einsetzen



Herleitung der leaky-box equation

$$\sum_i A_i [\mathcal{O}_p R_i(p) - \lambda_i^2 g(p) R_i(p) + Q_2(p)] = 0$$

- man nehme die DGL für G
- multipliziere sie mit $M_a(\mathbf{x}, p) = \sum_i A_i(\mathbf{x}) R_i(p)$
- und integriere über u von 0 bis ∞
- die linke Seite partiell integrieren und die Definition $R_i(p) \equiv \int_0^\infty du G(p, u) e^{-\lambda_i^2 u}$ einsetzen
- der ausdruck in der Klammer muss für alle A_i Null sein



leaky-box equation

$$\mathcal{O}_p R_i(p) - \lambda_i^2 g(p) R_i(p) = -Q_2(p)$$

Damit haben wir das Impuls-Problem auf eine gewöhnliche DGL zurückgeführt. Die Eigenwerte des Ortsproblems $-\lambda_i^2$ gehen nun als inverse katastrophale Verlustzeiten in das Impulsproblem ein.



Nach Einsetzen von \mathcal{O}_p , Vereinfachen und Einführen einiger Abkürzungen kommt man für Protonen auf:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dp^2} R_i(p) + ((4 - \eta - a) p^{-1} + \beta p^{\eta-1}) \frac{d}{dp} R_i(p) + \\ ((\eta - 3) a p^{-2} - (\xi - 3\beta) p^{\eta-2} - \psi_i p^{2\eta-2}) R_i(p) = \\ = -\frac{Q(p)}{a_2 p_1^\eta} p^{\eta-2} \end{aligned}$$

Diese DGL ist analytisch lösbar, was von Lerche u. Schlickeiser (1988) gemacht wurde.



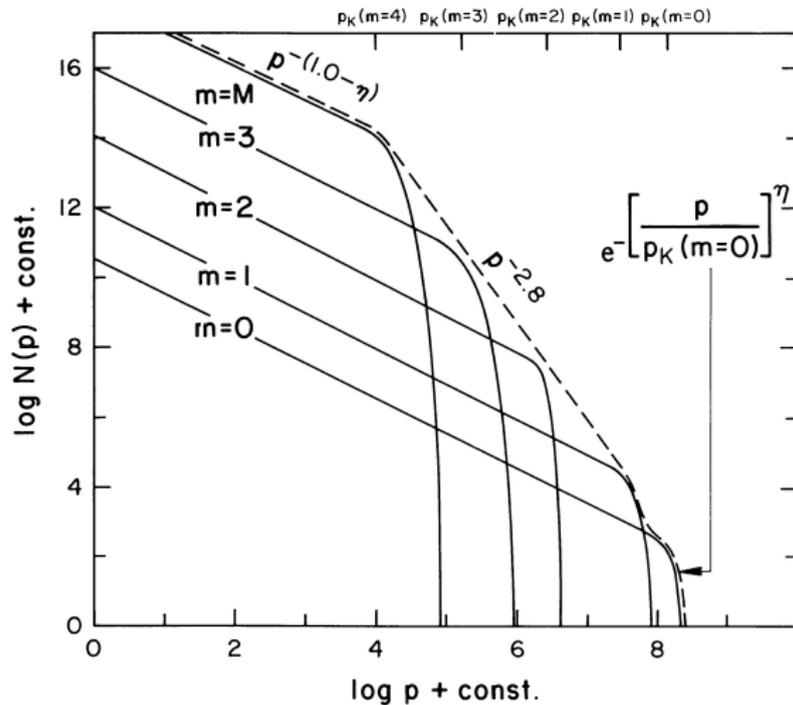
Will man die Verteilung von Elektronen im Impulsraum bestimmen, müssen **Synchrotron- und IC-Verluste** eingefügt werden, die bei hochenergetischen e^- dominieren.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dp^2} R_i(p) + ((4 - \eta - a) p^{-1} + \beta p^{\eta-1} + \delta p^\eta) \frac{d}{dp} R_i(p) + \\ ((\eta - 3) a p^{-2} + 3\beta p^{\eta-2} + 4\delta p^{\eta-1} - \psi_i p^{2\eta-2}) R_i(p) = \\ = -\frac{Q(p)}{a_2 p_1^\eta} p^{\eta-2} \end{aligned}$$

Das erschwert die analytische Lösung.



Ergebnisse?



Erfolge

- Iterationsverfahren läuft korrekt und lässt sich gut parallelisieren
- Analytische Lösung (für Protonen) verifiziert
- 2 wesentliche Fehler in alten Papern zu dem Thema gefunden :)

Ausblick

- Das auf der Erde ankommende Spektrum bestimmen
- ???
- Profit!

Fragen?



- Schlickeiser, R. 2002, A&A Library, *“Cosmic Ray Astrophysics”*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Lerche, I. and Schlickeiser, R. 1988, *Astrophysics and Space Science* 145, p. 319-354
- Wang, Y.-M. and Schlickeiser, R. 1987, *The Astrophysical Journal* 313, p. 200-217
- Hein, T. and Spanier, F. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 481, Issue 1, 2008, pp.1-16
- Blandford, R. D. and Ostriker, J.P. 1978, *Ap. J.* 221, p. 29-32
- Hörandel, J.R. 2007, *“Cosmic-ray composition and its relation to shock acceleration by supernova remnants”*, arXiv:astro-ph/0702370v2
- Kirk, J.G. and Dendy, R.O. 2001, *“Shock Acceleration of Cosmic Rays - a critical review”*, arXiv:astro-ph/0101175v1



Wenn analytische Methoden versagen, greift der Physiker zu Numerik:
Nach Diskretisieren der Ableitungen:

$$\frac{dR(p)}{dp} \rightarrow \frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta p} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 R(p)}{dp^2} \rightarrow \frac{R_{i+1} - 2R_i + R_{i-1}}{\Delta p^2}$$

kann man die Gleichung in Matrix-Schreibweise folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$



Stellt man nun die i -te Zeile

$$a_{ii-1} \cdot R_{i-1} + a_{ii} \cdot R_i + a_{ii+1} \cdot R_{i+1} = Q_i$$

nach R_i um, erhält man die Rechenvorschrift für einen Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens:

$$R_i^{neu} = \frac{1}{a_{ii}} \left(Q_i - a_{ii-1} \cdot R_{i-1}^{alt} - a_{ii+1} \cdot R_{i+1}^{alt} \right)$$



Damit die Lösung schneller konvergiert, kann man die berechneten Werte R_{i-1} sofort für die Berechnung von R_i verwenden (Gauss-Seidel Verfahren):

$$R_i^{neu} = \frac{1}{a_{ii}} \left(Q_i - a_{ii-1} \cdot R_{i-1}^{neu} - a_{ii+1} \cdot R_{i+1}^{alt} \right)$$

Nachteil: es ist nicht parallelisierbar (der Intel-compiler schafft's trotzdem)

