

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

# Diffusion von CRs im turbulenten interstellaren Medium

Eine Lösung der MHD-Gleichungen mittels  
pseudospektraler Methoden

Sebastian Lange

Universität Würzburg  
Institut für Astrophysik

11. Oktober 2007

## 1 Motivation

## 2 Simulation des ISM

- Die MHD-Gleichungen
- Spektrale Methoden

## 3 Die Testteilchen

- Vlasovgleichung
- Fokker-Planck-Gleichung

# Motivation

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Beschreibung des ISM
- Ziel: Teilchendiffusion durch das turbulente ISM zu simulieren
- Beschreibung der Teilchenbewegung durch die Fokker-Planck Gleichung mit gleichnamigen Koeffizienten

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

# Simulation des ISM

# Beschreibung des ISM

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Durch die Magneto-Hydrodynamikgleichungen (MHD-Gleichungen) beschrieben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{s} \quad (\text{Kontinuität})$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \frac{\vec{s}\vec{s}}{\rho} + \left( p + \frac{B^2}{2} \right) \cdot \mathbb{1} - \vec{B}\vec{B} \right) \quad (\text{Impuls})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \frac{\vec{s}\vec{B} - \vec{B}\vec{s}}{\rho} \right) \quad (\text{Induktion})$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \left( e + p + \frac{B^2}{2} \right) \vec{s} - (\vec{s} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) \quad (\text{Energie})$$

- Mit  $\vec{s} = \rho \vec{v}$ ,  $e$  Energiedichte,  $p$  Druck

# Simulationsprobleme

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Gleichungssystem aus 8 partiellen DGLs
- Simulation im Realraum leidet stark unter numerischer Dissipation
- Spektrum verschmiert (kein Kolmogorovspektrum, wie im ISM angenommen)

# Idee spektraler Methoden

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Lösung der MHD-Gleichungen im  $k$ -Raum:

$$\Rightarrow \int \dots e^{ikx} dx$$

- Vorteil:

$$\nabla \rightarrow k$$

$$\Delta \rightarrow k^2$$

# Idee spektraler Methoden

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- System partieller DGLs werden zu System gewöhnlicher DGLs
- Numerische Dissipation vernachlässigbar

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

# Die Testteilchen

# Die Vlasovgleichung

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Ausgehend von der relativistischen Vlasovgleichung:

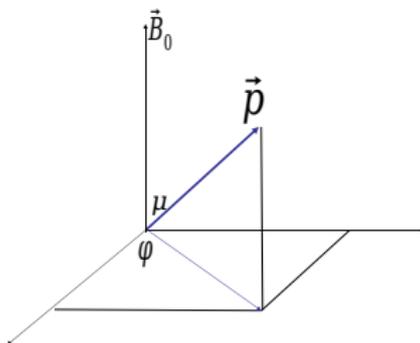
$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{x}} + \vec{p} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = S_a(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

- Mit den Bewegungsgleichungen:

$$\vec{p} = q_a \left( \vec{E}_T(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_T(\vec{x}, t)}{c} \right)$$
$$\vec{x} = \frac{\vec{p}}{\gamma m_a}$$

# Neue Koordinaten

- Aufgrund der Gyration geladener Teilchen im Magnetfeld Wechsel zu Führungszentrumkoordinaten  $(X, Y, Z)$  sinnvoll
- Außerdem Impulsraumkoordinaten sphärisch  $(p, \mu, \phi)$   
 $\Rightarrow X_\sigma = (X, Y, Z, p, \mu, \phi)$ , wobei  $\mu = \cos\theta$



# Vlasovgleichung in neuen Koordinaten

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_a}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial f_a}{\partial \Phi} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial X_\sigma} (p^2 g_{X_\sigma} f_a) = S_a(\vec{X}, t)$$

- Wobei der Einfluss der fluktuierenden Felder auf die Teilchen durch die Kraftterme  $g_{X_\sigma}$  gegeben ist:

$$g_p = \dot{p}$$

$$g_X = \dot{X}$$

$$g_\mu = \dot{\mu}$$

$$g_Y = \dot{Y}$$

$$g_\phi = \dot{\phi}$$

$$g_Z = \dot{Z}$$

# Mittelung über die Fluktuationen

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

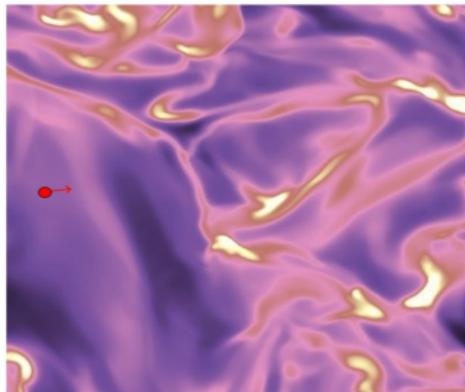
Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung



$$\langle f_a(\vec{x}, \vec{p}, t) \rangle = F_a(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

# Fokker-Planck-Gleichung

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

- Mittelung führt zur Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial \langle f_a \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f_a \rangle}{\partial Z} - \Omega \frac{\partial \langle f_a \rangle}{\partial \Phi} = S_a(\vec{X}, t) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial X_\sigma} \left( p^2 D_{X_\sigma X_\nu} \frac{\partial \langle f_a \rangle}{\partial X_\nu} \right)$$

- Mit den Fokker-Planck-Koeffizienten

$$D_{X_\sigma X_\nu}(X_\eta, t) = \int_0^t d\hat{t} \langle g_{X_\sigma}(t) g_{X_\nu}^*(\hat{t}) \rangle$$

# Fokker-Planck-Koeffizienten

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

$$D_{X_\sigma X_\nu}(X_\eta, t) = \int_0^t d\hat{t} \langle g_{X_\sigma}(t) g_{X_\nu}^*(\hat{t}) \rangle$$

- Kenntnis der Kraftterme zu jeder Zeit erforderlich
- Simulationsziel: Trajektorie der Teilchen

Teilchendiffusion  
im ISM

Sebastian  
Lange

Motivation

Simulation  
des ISM

Die  
MHD-Gleichungen  
Spektrale Methoden

Die  
Testteilchen

Vlasovgleichung  
Fokker-Planck-  
Gleichung

# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!