Die Weibel-Instabilität in astrophysikalischen Plasmen

Thomas Burkart

Universität Würzburg

06.10.2006

Übersicht

Vlasov-Gleichung

Vlasov-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

wobei f die Verteilungsfunktion der Teilchen des Plasmas ist.

Lösung der Vlasov-Gleichung

Zur Lösung der Vlasov-Gleichung macht man folgende Annahmen:

- Gleichung linearisieren:
  $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(v) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t)$ mit $|f_1| << f_0$
  und Terme zweiter Ordnung vernachlässigen
- $f_0(v)$ ist nur von $|\vec{v}|$ abhängig $\Rightarrow$ $(\vec{v} \times \vec{B})$-Term fällt weg

Lösung der Vlasov-Gleichung

Zur Lösung der Vlasov-Gleichung macht man folgende Annahmen:

- Gleichung linearisieren:
  $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(v) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t)$ mit $|f_1| << f_0$
  und Terme zweiter Ordnung vernachlässigen
- $f_0(v)$ ist nur von $|\vec{v}|$ abhängig $\Rightarrow$ $(\vec{v} \times \vec{B})$-Term fällt weg

Lösung der Vlasov-Gleichung

Zur Lösung der Vlasov-Gleichung macht man folgende Annahmen:

harmonische Analyse:

$$f_1(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_1(\vec{v}) \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - wt\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - wt\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - wt\right)}$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - wt\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J} \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - wt\right)}$$

Lösung der Vlasov-Gleichung

Ausgehend davon erhalten wir nach kurzer Rechnung folgende Dispersionsrelation für longitudinale Wellen in einem Elektronen-Gas:

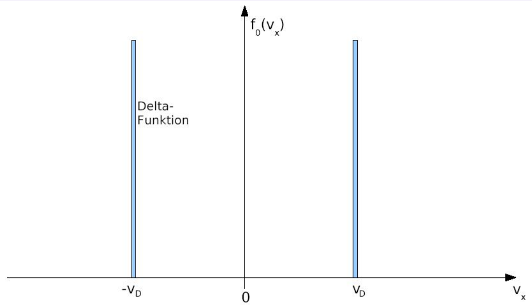
$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{n_e \cdot k^2} \int_{\vec{v}} \frac{f_0(v)}{(v_x - \frac{\omega}{k})^2} \, d^3 v$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \quad \text{(Plasmafrequenz der Elektronen)}$$

Übersicht

Weibel-Instabilität

Die Verteilungsfunktion für ein Plasma mit zwei gegeneinander strömenden Elektronengasen lautet



$$f_0(v) = \frac{1}{2} n_e \left(\delta(v_x - v_D) + \delta(v_x + v_D)\right) \delta(v_y)\, \delta(v_z)$$

wobei v_D der Betrag der Driftgeschwindigkeit eines Plasmastroms ist.

Weibel-Instabilität

Durch Einsetzen der Verteilungsfunktion für die Zwei-Strom-Instabilität in die Dispersionsrelation erhalten wir ein Polynom vierten Grades in ω:

$$\omega^4 - B\omega^2 + C = 0$$

mit

$$B = \omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2 \qquad \text{(immer} > 0\text{)}$$
$$C = k^2 v_D^2 \cdot \left(k^2 v_D^2 - \omega_{pe}^2\right) \qquad \text{(hängt von } k\text{, } \omega_{pe} \text{ und } v_D \text{ ab)}$$

Stabilitätsanalyse

$k^2 v_D^2 > \omega_{pe}^2$

$\Rightarrow \omega_1^2$ und ω_2^2 positiv und reell

$\Rightarrow \omega$ reell

$k^2 v_D^2 < \omega_{pe}^2$

$\Rightarrow \omega_1^2$ positiv und reell, ω_2^2 negativ und reell

$\Rightarrow \omega_1$ reell, ω_2 imaginär

$\omega_2 < 0$: Dämpfung

$\omega_2 > 0$: Instabilität

Stabilitätsanalyse

$k^2 v_D^2 > \omega_{pe}^2$

$\Rightarrow \omega_1^2$ und ω_2^2 positiv und reell

$\Rightarrow \omega$ reell

$k^2 v_D^2 < \omega_{pe}^2$

$\Rightarrow \omega_1^2$ positiv und reell, ω_2^2 negativ und reell

$\Rightarrow \omega_1$ reell, ω_2 imaginär

$\omega_2 < 0$: Dämpfung

$\omega_2 > 0$: Instabilität

Wachstumsrate

Um das Maximum der Wachstumsrate zu bekommen, muss

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right) - \left(\omega_{pe}^2\left(\frac{1}{4}\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach k abgeleitet werden.

$\Rightarrow$ maximale Wachstumsrate bei $\omega_{2,max} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \omega_{pe}$

Wachstumsrate

Um das Maximum der Wachstumsrate zu bekommen, muss

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right) - \left(\omega_{pe}^2\left(\frac{1}{4}\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach k abgeleitet werden.

$\Rightarrow$ maximale Wachstumsrate bei $\omega_{2,max} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \omega_{pe}$

viele Vereinfachungen, bessere Möglichkeit???

Wachstumsrate

Um das Maximum der Wachstumsrate zu bekommen, muss

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right) - \left(\omega_{pe}^2\left(\frac{1}{4}\omega_{pe}^2 + 2k^2 v_D^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach k abgeleitet werden.

$\Rightarrow$ maximale Wachstumsrate bei $\omega_{2,max} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \omega_{pe}$

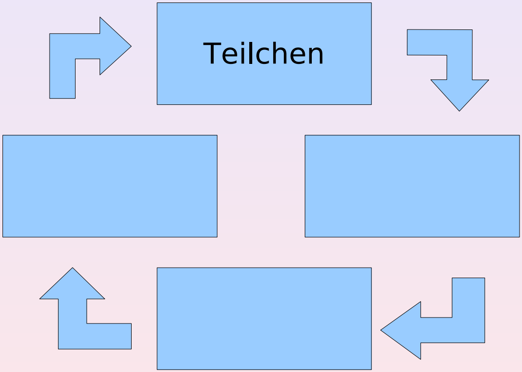
viele Vereinfachungen, bessere Möglichkeit???

Übersicht

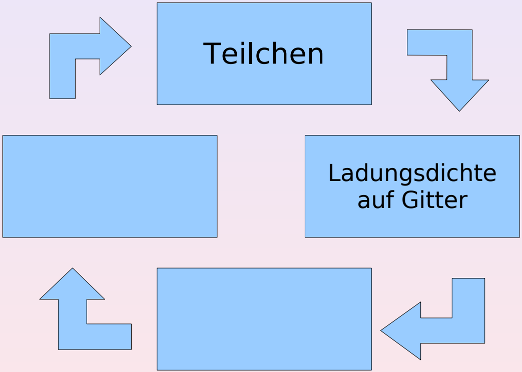
PIC-Simulation

Dies soll nun mit Hilfe eines **Particle-In-Cell**-Codes simuliert werden.

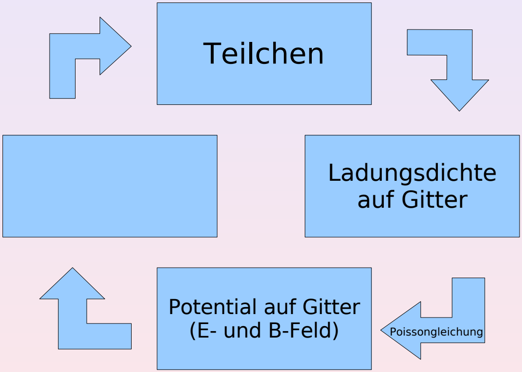
Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



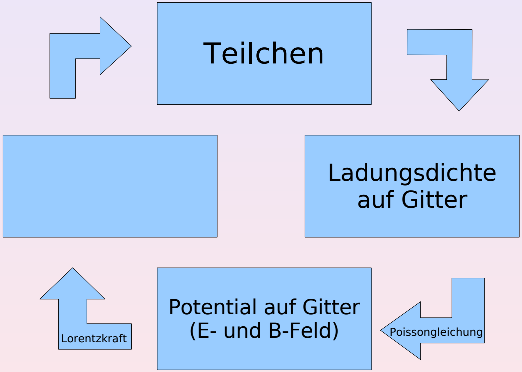
Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



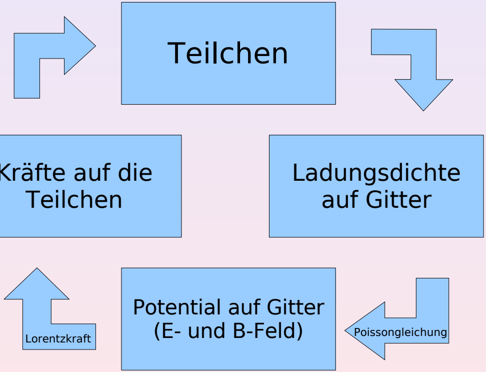
Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



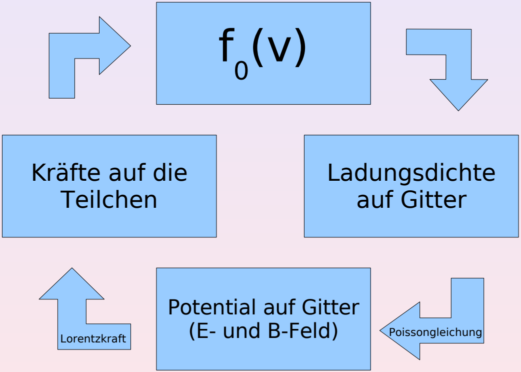
Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



Eine PIC-Simulation läuft folgendermaßen ab:



Die Weibel-Instabilität ist mitverantwortlich für

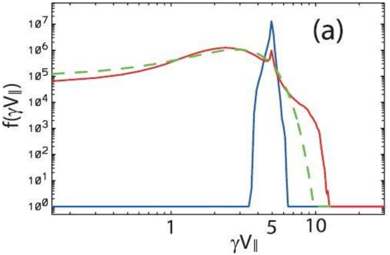
- Entstehung großskaliger Magnetfelder im Universum

Die Weibel-Instabilität ist mitverantwortlich für

- Entstehung großskaliger Magnetfelder im Universum
- Teilchenbeschleunigung in relativistischen Schocks (AGN, GRB, Mikroquasare, ...)

Die Weibel-Instabilität ist mitverantwortlich für

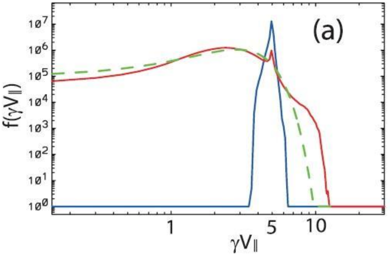
- Entstehung großskaliger Magnetfelder im Universum
- Teilchenbeschleunigung in relativistischen Schocks (AGN, GRB, Mikroquasare, ...)



Nishikawa et al, Astrophys. Journal 2006

Die Weibel-Instabilität ist mitverantwortlich für

- Entstehung großskaliger Magnetfelder im Universum
- Teilchenbeschleunigung in relativistischen Schocks (AGN, GRB, Mikroquasare, ...)



Nishikawa et al, Astrophys. Journal 2006

Danke für eure Aufmerksamkeit

- **J. A. Bittencourt**: Fundamentals of Plasma Physics; 2004 Springer-Verlag New York
- **Erich S. Weibel** 1959: Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution; Phys. Rev. Letters Vol.2, No.3
- **K.-I. Nishikawa et al.** 2003; Particle acceleration in relativistic jets due to the Weibel instability; The Astrophysical Journal 595, 555-563
- **K.-I. Nishikawa et al.** 2006; Acceleration mechanics in relativistic shocks by the Weibel instability; The Astrophysical Journal 642, 1267-1274